Theoretische Physik I

Hausübung, Blatt 3 **WS 03/04 Abgabetermin: Di. 4.11.03**

[H7] Komet **(2 Punkte)**

Ein Komet bewegt sich auf einer parabolischen Bahn im Gravitationsfeld der Sonne. Seine Bahnebene fällt mit der Ebene der als kreisförmig anzunehmenden Erdbahn um die Sonne zusammen. Sein Perihelabstand beträgt ein Drittel des Radius der Erdbahn. Für wie viele Tage befindet sich der Komet innerhalb der Erdbahn? Die Störung der Kometenbahn durch die Planeten sei zu vernachlässigen. *Hinweis*: Verwenden sie den Energiesatz, wobei für die parabolische Bewegung $E = 0$ gilt.

[H8] Teilchen im Schwarzschild Potential **(4 Punkte)**

Die Bewegung eines Testteilchens der Masse m im Gravitationsfeld eines sphärisch symmetrischen statischen Sterns wird in der Allgemeinen Relativitätstheorie durch die Wirkung

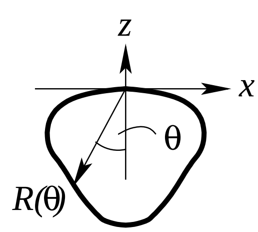
$$S = -\tfrac{1}{2}m \int dt \, \left\{ \dot{T}^2 \, (1 - \tfrac{r_0}{r}) - \frac{\dot{r}^2}{1-\frac{r_0}{r}} - r^2\dot{\theta}^2 - r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta \right\} \quad , \quad r_0 = \text{const},$$

beschrieben. Dabei sind $r(t), \theta(t), \varphi(t)$ sphärische Ortskoordinaten, und $T(t)$ ist eine Uhr des Teilchens. Identifizieren Sie zyklische Koordinaten und bestimmen Sie die zugehörigen Erhaltungsgrößen. Finden Sie eine möglichst einfache Lösung der Lagrange-Gleichung für die Koordinate θ. Argumentieren Sie, daß die Lagrange-Funktion selbst eine Erhaltungsgröße ist und wählen Sie ihren Wert als $-\frac{1}{2}mc^2$. Verwenden Sie die so erhaltenen Ergebnisse, um eine einfache Gleichung für $\dot{r}$ aufzustellen. Vergleichen Sie diese mit der radialen Geschwindigkeit $\dot{r}$ im Newtonschen Fall, um die Konstanten zu bestimmen. Bestimmen sie das effektive Potential bis auf additive Konstanten. Was ist der Unterschied zum Newtonschen Fall?

[H9] Asteroiden-Engineering – "Lechtenfeld's Surface" **(2+2 Punkte)**

Gesucht ist ein Körper mit homogener Massenverteilung ρ und fester Gesamtmasse M aber noch unbekannter Gestalt mit der Eigenschaft, daß an einem Punkt der Oberfläche die Gravitation maximal wird.

Legen Sie den Oberflächenpunkt in den Ursprung. Überzeugen Sie sich durch ein Symmetrieargument davon, daß die Oberfläche rotationssymmetrisch um die z-Achse ist. Es genügt also, einen Schnitt mit der xz-Ebene zu betrachten. Setzen Sie die Randkurve als $R(\theta)$ an (Skizze).



(a) Durch welches Funktional $F[R]$ wird die im Ursprung wirkende z-Komponente der Gravitationskraft beschrieben? Mit welchem Integral $M[R]$ berechnet sich die Gesamtmasse M? Führen Sie die Integrationen über φ und r aus. Berechnen Sie $F[R]$ für den Fall der Kugel, d.h. $R(\theta) = 2R_K \cos\theta$, mit dem Kugelradius $R_K = (\frac{3M}{4\pi\rho})^{1/3}$.

(b) Bestimmen Sie die Körperform, also $R(\theta)$, welche die Kraft im Ursprung maximiert. Finden Sie dazu das Extremum des Funktionals $F[R]$ und berücksichtigen Sie die feste Gesamtmasse M als Nebenbedingung mittels eines Lagrange-Multiplikators.

Vorlesung: O. Lechtenfeld - Übungen: R. Wimmer